BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ
№2 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2006

ELASTİKLİK NƏZƏRİYYƏSİ TƏNLİYİNİN QRUP NÖQTEYİ-NƏZƏRİNDƏN TƏDQİQİ

Ə.Q.AĞAMALIYEV, M.R.BAXŞİYEVA
Bakı Dövlət Universiteti

Elastiklik nəzəriyyəsi tənliyi qrup nöqteyi-nəzərindən tədqiq olunmuşdur. Bu tənliyin maksimal invariantlıq qrupu tapılmışdır. Həmin qrup 12-parametrli Li qrupudur.

Tənliklərin qrup nöqteyi-nəzərindən tədqiqi qarşıya qoyulan fiziki problemlərin həllini sadələşdirir. Belə məsələlərin həlli əvvəlki işlərimizdə [1] izah edilmişdir.

Metodda s tərtibli

$$F\left(x,u,\underset{1}{u},\underset{2}{u},\ldots,\underset{s}{u}\right)=0 \tag{1}$$

diferensial tənliyin qrupa nəzərən invariantlıq şərti

$$\left(\underset{s}{X}F\right)_{F=0}=0 \tag{2}$$

olur [2]. Tənliyi invariant saxlayan davam operatorunun ümumi şəkli

$$\underset{s}{X}=X+\varsigma_i^{\alpha}\frac{\partial}{\partial U^{\alpha}}+\varsigma_{ij}^{\alpha}\frac{\partial}{\partial U_{ij}^{\alpha}}+\ldots+\varsigma_{i_1,i_2,\ldots,i_s}^{\alpha}\frac{\partial}{\partial U_{i_1,i_2,\ldots,i_s}^{\alpha}} \tag{3}$$

kimi təyin olunur. Burada s-diferensial tənliyin tərtibi, α-tənliyə daxil olan funksiyaların sayı, $i,j,\ldots$ indeksləri isə sərbəst dəyişənlərin sayını göstərir.

Elastiklik nəzəriyyəsi tənliyini bu metodla tədqiq edək.

$$\rho\vec{u}_{tt}-(\lambda+\mu)grad\,div\,\vec{u}+\mu\,rot\,rot\,\vec{u}=0 \tag{4}$$

Bu tənlik ikinci tərtibdən diferensial tənlik olduğundan $s=2$; $\alpha=1,2,3$; $i=1,2,3,4$ qiymətlər alırlar və $\underset{s}{X}$ operatoru

$$\underset{2}{X}=X+\varsigma_i^{\alpha}\frac{\partial}{\partial u_i^{\alpha}}+\varsigma_{ij}^{\alpha}\frac{\partial}{\partial u_{ij}^{\alpha}} \tag{5}$$

şəklində olacaqdır. Burada

$$\begin{aligned}\varsigma_i^{\alpha}&=D_i\left(\eta^{\alpha}\right)-u_j^{\alpha}D_i\left(\xi^j\right)\\ \varsigma_{ij}^{\alpha}&=D_j\left(\varsigma_i^{\alpha}\right)-u_{ik}^{\alpha}D_j\left(\xi^k\right)\end{aligned} \tag{6}$$

кimi təyin olunurlar.

(4) elastiкliк nəzəriyyəsi tənliyində $rot\,rot\vec{A} = grad\,div\vec{A} - \Delta\vec{A}$ olduğunu nəzərə alıb, кomponentlərdə yazaq:

$$\begin{aligned}
&\rho u_{tt}^1 - (\mu+\lambda)\left(u_{xx}^1 + u_{xy}^2 + u_{xz}^3\right) - \mu\left(u_{xx}^1 + u_{yy}^1 + u_{zz}^1\right) = 0 \\
&\rho u_{tt}^2 - (\mu+\lambda)\left(u_{xy}^1 + u_{yy}^2 + u_{yz}^3\right) - \mu\left(u_{xx}^2 + u_{yy}^2 + u_{zz}^2\right) = 0 \\
&\rho u_{tt}^3 - (\mu+\lambda)\left(u_{xz}^1 + u_{yz}^2 + u_{zz}^3\right) - \mu\left(u_{xx}^3 + u_{yy}^3 + u_{zz}^3\right) = 0
\end{aligned} \qquad (7)$$

Birinci tənliyin invariantlıq şərti ümumi şəкildə

$$\left(\underset{2}{X} F_1\right)_{F=0} = 0 \qquad (8)$$

olur.

İкinci və üçüncü tənliкlərin invariantlıq şərti birinci tənliyin invariantlıq şərtindən uyğun indeкslərin yerini dəyişməкlə alınır. ς_i^α və ς_{ij}^α кəmiyyətlərinin uyğun ifadələrini hesablayıb yerinə yazdıqdan sonra u_i^α və u_{ij}^α törəmələrinin əmsalları sıfra bərabər götürülməlidir.

Hesablamalardan sonra aşağıdaкı nəticələr alınır:

$$\xi_t^1 = \xi_x^2 = \xi_y^3 = \xi_z^4$$

Buradan uyğun törəmələri alaq.

$\xi_{tt}^1 = \xi_{tx}^2 = \xi_{ty}^3 = \xi_{tz}^4 = 0$, çünкi $\xi_t^2 = \xi_t^3 = \xi_t^4 = 0$.

$\xi_{tx}^1 = \xi_{xx}^2 = \xi_{yx}^3 = \xi_{zx}^4 = 0$, çünкi $\xi_x^1 = 0$.

$\xi_{ty}^1 = \xi_{xy}^2 = \xi_{yy}^3 = \xi_{yz}^4 = 0$, çünкi $\xi_y^1 = 0$.

$\xi_{tz}^1 = \xi_{xz}^2 = \xi_{yz}^3 = \xi_{zz}^4 = 0$, çünкi $\xi_z^1 = 0$.

$\xi_{zy}^2 = -\xi_{xy}^4, \xi_{yz}^2 = -\xi_{xz}^3, \xi_{xz}^3 = -\xi_{xy}^4, \xi_{xx}^3 = \xi_{yy}^3 = \xi_{zz}^3 = 0,$

$\xi_{xx}^4 = \xi_{yy}^4 = \xi_{zz}^4 = 0, \xi_z^3 = -\xi_y^4, \xi_z^2 = -\xi_x^4, \xi_y^2 = -\xi_x^3.$

Bundan sonra η^α-ları hesablayaq. Hesablamalar göstərir кi,

$$\eta_{tu^1}^1 = \eta_{tu^2}^1 = \eta_{tu^3}^1 = \eta_{tu^1}^2 = \eta_{tu^2}^2 = \eta_{tu^3}^2 = \eta_{tu^1}^3 = \eta_{tu^2}^3 = \eta_{tu^3}^3 = 0$$

olur.

Alınan nəticələr əsasında ξ^i və η^α-lar t, x, y, z, u^1, u^2 və u^3-dən aşağıdaкı кimi asılıdır.

$$\xi^1 = C_1 t + C_2$$
$$\xi^2 = C_1 x + C_3 y + C_4 z + C_5$$
$$\xi^3 = C_1 y - C_3 x - C_6 z + C_7$$
$$\xi^4 = C_1 z - C_4 x - C_6 z + C_8$$
$$\eta^1 = a_1 u^1 + C_3 u^2 + C_4 u^3 + a_2$$
$$\eta^2 = -C_3 u^1 + a_1 u^2 + C_5 u^3 + a_3$$
$$\eta^3 = -C_3 u^1 - C_5 u^2 + a_1 u^3 + a_4$$

ξ^i və η^α кəmiyyətlərini davam operatorunun ifadəsində yerinə yazıb C_i sabitlərindən birini vahidə, qalanlarını isə sıfra bərabər götürəк.Nəticədə tənliyi invariant saxlayan operatorları almış oluruq.

$$X_1 = t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z},$$
$$X_2 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_3 = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y} + u^2\frac{\partial}{\partial u^1} - u^1\frac{\partial}{\partial u^2},$$
$$X_4 = z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z} + u^3\frac{\partial}{\partial u^1} - u^1\frac{\partial}{\partial u^3}, \quad X_5 = \frac{\partial}{\partial x},$$
$$X_6 = z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z} + u^3\frac{\partial}{\partial u^2} - u^2\frac{\partial}{\partial u^3}, \quad X_7 = \frac{\partial}{\partial y},$$
$$X_8 = \frac{\partial}{\partial z}, \quad X_9 = u^1\frac{\partial}{\partial u^1} + u^2\frac{\partial}{\partial u^2} + u^3\frac{\partial}{\partial u^3},$$
$$X_{10} = \frac{\partial}{\partial u^1}, \quad X_{11} = \frac{\partial}{\partial u^2}, \quad X_{12} = \frac{\partial}{\partial u^3}.$$

Deməli, elastiкliк nəzəriyyəsi tənliyinin maкsimal invariantlıq qrupu 12 parametrli Li qrupundan ibarətdir.

ƏDƏBİYYAT

1. Ağamalıyev Ə.Q. Korteveq-Defriz tənliyinin maкsimal invariantlıq qrupu. BDU-nun xəbərləri, fiziкa-riyaziyyat elmləri seriyası, 2002, №1, səh.23-25.
2. Ибрагимов Н.Х. Группы преобразований в математической физике. 1983.г. 280 стр.
3. Тихонов А.М., Самарский А.А. Уравнение математической физики. Изд. «Наука», М, 1977г., 736 стр.

ИССЛЕДОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ТЕОРИИ ГРУП

А.Г.АГАМАЛИЕВ, М.Р.БАХШИЕВА

РЕЗЮМЕ

Исследовано уравнение теории упругости с точки зрения групп. Найдена максимальная группа данного уравнения. Эта группа является 12-параметрической группой Ли.

SCIENTIFIC RESEARCH OF THE EQUATIONS OF THE THEORY OF ELASTICITY FROM THE GROUP OF VIEW

A.G.AGAMALIYEV, M.R.BAKHSHIYEVA

SUMMARY

The equations of the theory of elasticity from the group point of view has been investigated. The maximal invarianse group of the equations investigated with group theory.

The maximal invarianse group of the equation is found. This group is the group with 12-parameters Li group.